УРОК 4

Тема уроку: Скалярний добуток векторів

Підручник з математики для 10 класу § 6 п. 42

Сьогодні на уроці ви повинні зрозуміти поняття скалярного добутку векторів та кута між векторами, вивчити теорему про скалярний добуток векторів та розкрити її зміст. Вам треба навчитися застосовувати знання до розв'язування задач.

Перевірка домашнього завдання

№40.2 *Відповідь:* 1). $\overline{DC_1}$; 2). $\overline{AD}$

№40.6 *Відповідь:* 1). $\bar{m}+\bar{n}=(-10;1;4)$; 2). $|\bar{m}+\bar{n}|=\sqrt{117}$

№40.8 *Відповідь:* 1). $\bar{m}-\bar{n}=(-1;1;5)$; 2). $|\bar{m}-\bar{n}|=3\sqrt{3}$

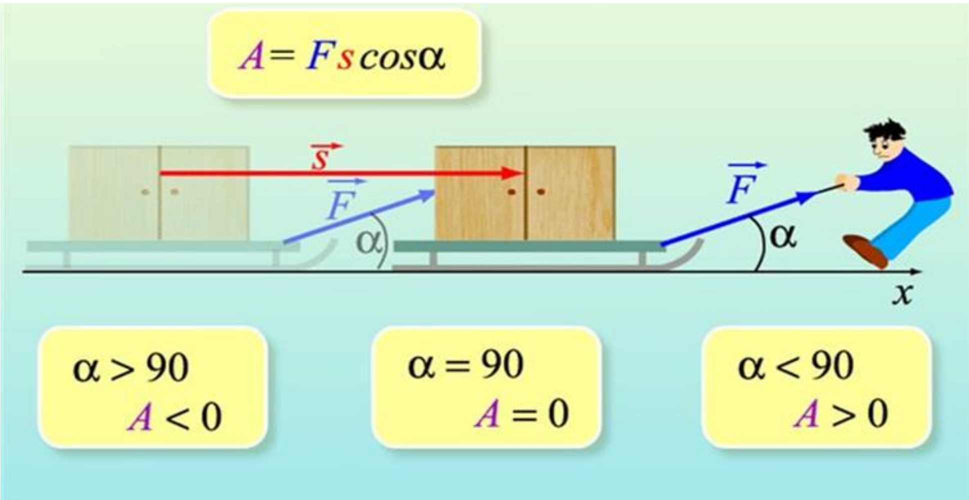
№41.5 *Відповідь:* 1). $\bar{a}=(13;-19;46)$; 2). $\bar{a}=(-19;-1;-28)$

№41.14 *Відповідь:* $x=-\frac{4}{7}$; $z=\frac{35}{4}=8\frac{3}{4}$

Виконай вправу і перевір свої знання http://surl.li/crcbm

На попередніх уроках ви навчились додавати та віднімати вектори, множити вектор на число.

Із курсу фізики ви знаєте, що коли під впливом постійної сили $\vec{F}$ тіло перемістилося з точки А в точку В, то здійснилась механічна робота A.



Цей факт показує, що для розв'язування таких задач, наших знань про вектор мало. Отже, сьогодні на уроці ви розглянете нове для вас поняття скалярний добуток векторів. З'ясуєте властивості скалярного добутку, навчитися знаходити кут між векторами. Розв'яжете задачі в яких використовується скалярний добуток векторів.

1. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ *і* $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ *називають число* $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Так само як і на площині скалярний добуток двох векторів записують, використовуючи знак множення: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}(-4; 1; 3)$ та $\vec{b}(2; 6; 5)$.

Розв'язання: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = -8 + 6 + 15 = 13$.

Відповідь: 13.

Знайдемо скалярний добуток рівних векторів. Нехай дано вектор $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$. Тоді:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right)^2 = |\vec{a}|^2.$$

Добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ записують $\vec{a}^2$ і називають *скалярним квадратом вектора.*

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

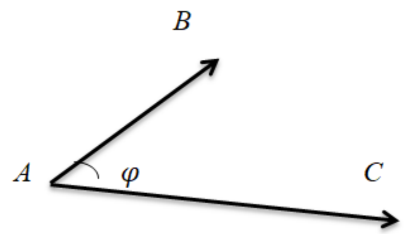
$$\boldsymbol{\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2}.$$

З означення скалярного добутку маємо його властивості.

Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і будь-якого числа λ:

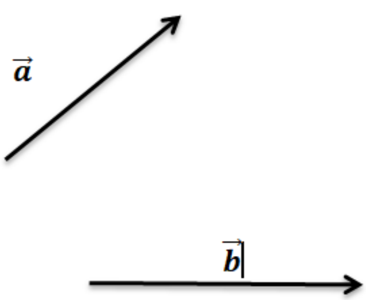
1) $\vec{a}^2 \geq 0$, **до того ж** $\vec{a}^2 > 0$, **якщо** $\vec{a} \neq 0$.
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ **-- переставна властивість.**
3) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$**-- сполучна властивість.**
4) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ **-- розподільна властивість.**

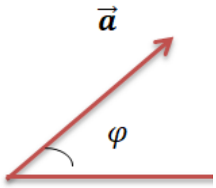
2. Кут між векторами



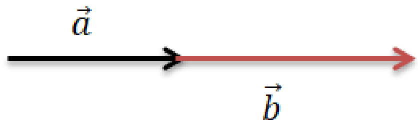
В стереометрії так як і у планіметрії **кут між векторами** $\overrightarrow{AB}$ **і** $\overrightarrow{AC}$ **називають ∠BAC.**

Кутом між двома ненульовими векторами, що не мають спільного початку називають кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок.

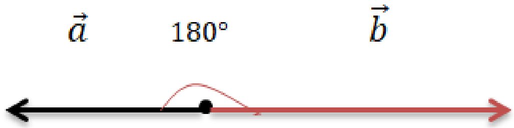




Кут між співнапрямленими векторами дорівнює нулю.



Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°.



3. Теорема про скалярний добуток векторів.

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \text{ де } \varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right).$$

Наслідок 1. **Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.**

Наслідок 2. **Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони перпендикулярні.**

Якщо з двох векторів хоча б один нульовий, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Кут φ між ненульовими векторами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ можна визначити за формулою

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

За значенням косинуса кута можна знайти міру цього кута (за допомогою таблиць чи калькулятора).

Опорний конспект

Задача №42.3 Знайдіть скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

1). $|\bar{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\bar{b}|$=5, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 30°$;

2). $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}|$=7, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 135°$;

Розв'язання $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, де φ=$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

1). $\bar{a} \cdot \bar{b} = 2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \cos 30° = 2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15$

2). $\bar{a} \cdot \bar{b} = 4 \cdot 7 \cdot \cos 135° = 4 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -14\sqrt{2}$

Відповідь: 1). 15 2).$-14\sqrt{2}$

Задача №42.7 Дано вектори $\bar{m}$ (3; −2; 4) і $\bar{n}$ (2; 2; z). При якому значенні z виконується рівність $\bar{m} \cdot \bar{n} = 18$?

Розв'язання $\bar{m} \cdot \bar{n} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = (3;\ -2;\ 4) \cdot (2;\ 2;\ \text{z}) = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot z = 6 - 4 + 4z = 2 + 4z$$

$$2 + 4z = 18$$

$$4z = 16$$

$$\text{z}=4$$

Відповідь: 4

Задача №42.14 При якому значенні x вектори $\bar{a}(x; -x; 1)$ і $\bar{b}(x; 2; 1)$ перпендикулярні?

Розв'язання *Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. Тому* $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x; -x; 1) \cdot (x; 2; 1) = x^2 - 2x+1$

$x^2 - 2x+1=0$

$(x - 1)^2 = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

Відповідь: при $x = 1$ вектори перпендикулярні

Домашнє завдання: Опрацювати § 6 п. 42, №42.4, №42.6, №42.8, №42.15